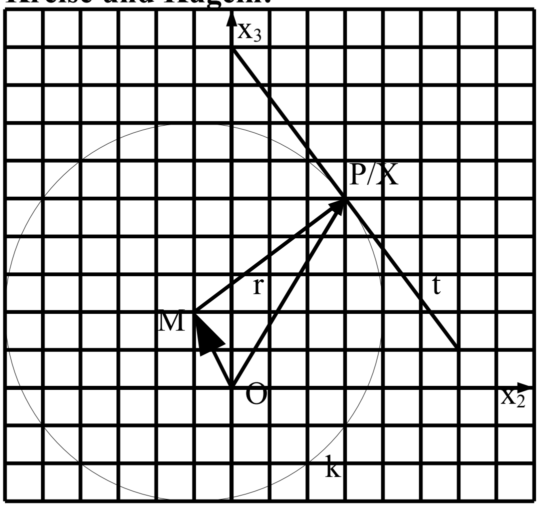
Kreise und Kugeln:



Die Graphik soll eine Kugel k mit Mittelpunkt M und Radius r darstellen.

1) Kugelgleichungen

P sei ein bestimmter und X ein beliebiger Kugelpunkt.

Da die Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r die Menge aller Punkte des Raumes ist, die von M den Abstand r haben gilt:

$|\overrightarrow{MX}|=r$ ... $(\vec{x}-\vec{m})^2=r^2$ ... $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2=r^2$ (*)

(beim Kreis entfällt die 3. Dimension)

Beispiel:

M(0‖-1|2) r=5

$(x_1-0)^2+(x_2+1)^2+(x_3-2)^2=25$

P(0|3|5) liegt auf der Kugel, da $0^2+4^2+3^2=25$

Durch Ausmultiplizieren erhält man

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2-4x_3-20=0$

Eine Gleichung der Form

$x_1^2+x_2^2+x_3^2+ax_1+bx_2+cx_3+d=0$

stellt aber nur eine Kugel dar, wenn man sie auf die Form (*) bringen kann:

$x_1^2+(x_2^2+2x_2\underline{+1})+(x_3^2-4x_3\underline{+4})-20\underline{-1-4}=0$ ... $(x_1-0)^2+(x_2+1)^2+(x_3-2)^2=25$

Die Methode heißt quadratische Ergänzung, zu beachten ist, dass das Unterstrichene 0 ergibt.

2) Tangentialebene

X sei nun ein beliebiger Punkt der Tangentialebene t in P. Da diese senkrecht auf dem Radiusvektor stehen muss gilt:

t: $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{PX}=0$ ... $(\vec{p}-\vec{m})(\vec{x}-\vec{p})=0$...$(\vec{p}-\vec{m})(\vec{x}-\vec{m}+\vec{m}-\vec{p})=0$

$(\vec{p}-\vec{m})(\vec{x}-\vec{m})=r^2$ ... $(p_1-m_1)(x_1-m_1)+(p_2-m_2)(x_2-m_2)+(p_3-m_3)(x_3-m_3)=25$

$(3+1)(x_2+1)+(5-2)(x_3-2)=25$...$4x_2+3x_3=27$

Aufgaben zum Kreis: (kann man weglassen)

1) Gegeben k: $x_1^2+x_2^2-4x_1+6x_2-3=0$ Gesucht: M, r [(2|-3), 4]

2) Gegeben k: $x_1^2+x_2^2+4x_2-21=0$ t:$x_1-2x_2+1=0$ Gesucht k∩t [(3|2), (-5|-2)]

3) Bestimme den Kreis durch A(-12|-4), B(6|2), C(-4|12) [(-4|2), 10]

4) Gegeben M(-1|7) r=$\sqrt{26}$ P(4|8) Gesucht t_P [$5x_1+x_2=28$]

5) Gegeben k:$x_1^2+x_2^2-2x_1+4x_2-5=0$, P(-4|3) Gesucht Tangenten durch P [$x_1+3x_2=5$ $3x_1+x_2=-9$]

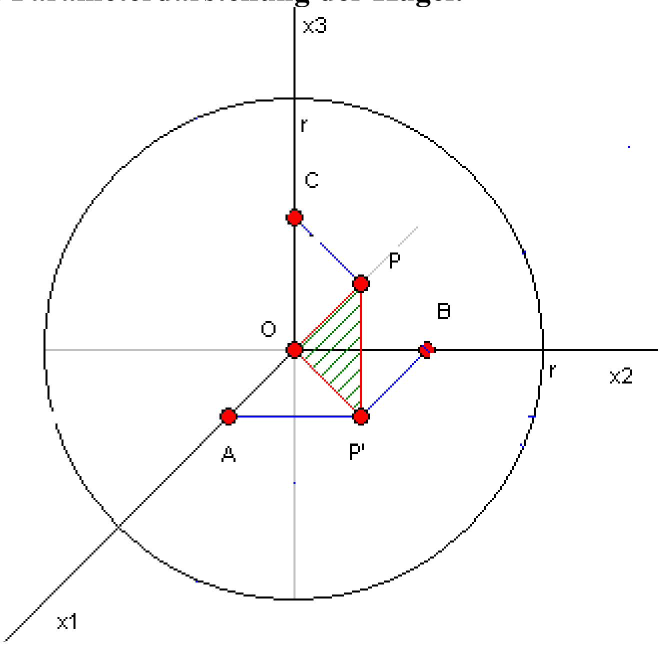
6) In welchen Punkten und unter welchen Winkeln schneiden sich die Kreise k_1: M_1(-1|-7), $r_1=9$ und k_2: M_2(1|7), $r_2=\sqrt{125}$ [(3|-4), (-4|-3), 63,4°

7) Anwendung: GPS(ebener Fall)

In einem x_1-x_2-Koordinatensystem befinde sich ein Sender im Ursprung, der andere bei (0|30), wobei die Einheit 1km sei. Ein Empfänger im 1. Feld empfange Signale. Die Laufzeit des Signals vom ersten Senders sei 0,2ms, die vom 2. sei 0,15ms. Wo befindet der Empfänger, wenn die Signalgeschwindigkeit 300000km/s beträgt.[]

Aufgaben zur Kugel:
1) Wo liegen A(-5|-1|-4), B(-2|4|5), C(-4|3|7) bezgl. k(M(2|-3|1);r=9) [k_i, k, k_a]
2) Bestimme M, r: $x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_1+4x_2+4=0$ [M(3|-2|0), r=3]
3) Berechne k(M(6|-3|2);r=3)∩(A(3|-1|6)B(5|-1|5)) [S(7|-1|4)]
4) Berechne die Tangentialebenen der Kugel k: $\vec{x}^{\,2}=9$ in P(2|?|2) .[$2x_1\pm x_2+2x_3=9$]
5) $k_1(M_1(1|2|2);r_1=2)\cap k_2(M_2(2|1|2);r_2=1)$ [Schnittkreis in $2x_1-2x_2=3$ (wenn Mittelpunktsabstand und die Radien ein Dreieck bilden, Kugelgleichungen subtrahieren)]
6) Die Berührpunkte der Tangenten von P(3|0|-1) an k(M(-1|4|5);r=6) bilden einen Kreis. Berechne dessen Trägerebene. [$2x_1-2x_2-3x_3+7=0$ (k mit Thaleskugel über PM schneiden, s. A5)]
7) Zeige: $k_1((1|2|2);\sqrt{6})\cap k_2((2|1|2);\sqrt{8})\cap k_3((2|2|1);\sqrt{10})=\{(2|3|4);(-2/3|1/3|4/3)\}$
Anleitung: Kugelgl. (1), (2), (3); Ebenen (1)-(2) und (1)-(3) schneiden und Schnittgerade in (1)

3) Parameterdarstellung der Kugel:



Die Grafik soll eine Kugel k um den Ursprung mit Radius r darstellen. Der Kreis ist der Schnitt der Kugel mit der x_2x_3-Ebene. P ist ein Kugelpunkt.
P ist ein Kugelpunkt, P' ist die orthogonale Projektion von P auf die x_1x_2-Ebene.
A, B, C sind orthogonale Projektionen von P auf die x_1-, x_2-, x_3-Achse.
λ=<(AOP') ... geographische Länge, φ<(P'OP) ... geographische Breite

$$\vec{x}=\vec{OA}+\vec{AP'}+\vec{P'P}=r\cos(\lambda)\cos(\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+r\sin(\lambda)\cos(\varphi)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+r\sin(\varphi)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

($-180°\leq\lambda<180°$, $-90°\leq\varphi<90°$)
Für M≠O muss noch der Ortsvektor von M addiert werden.
Aufgabe: Ein Flugzeug fliegt auf kürzestem Weg von New-York (40,6N|73,8W) nach London (51,5N|0,5W). Berechne Entfernung und Kurs fliegt es? (5444km/N51O)
Anleitung:
1. Umrechnung in kartesische Koordinaten (r=1): NY(0,212|-0,729|0,651),LO(0,622|-0.005|0,783)
2. Berechnung des Winkels zwischen den Ortsvektoren: 49°, Berechnung des Großkreisbogens.
3. Bei dem Kurswinkel handelt es sich um den Winkel zwischen der Ebene durch NYLOUrsprung und der Ebene durch NYNordpolUrsprung.
kartesische KO in Kugelkoordinaten: $x_1=r\cos(\lambda)\cos(\varphi)$ (1) $x_2=r\sin(\lambda)\cos(\varphi)$ (2) $x_3=r\sin(\varphi)$ (3)

(2)/(1): $\tan(\lambda)=\frac{x_2}{x_1}$ (3): $\sin(\varphi)=\frac{x_3}{r}$

Zum für GPS erfoderlichen Schnitt von 3 Kugeln siehe oben Kugelaufgabe 7.

Motivation:
Mit Navigator Länge und Breite bestimmen.
Zur Funktionsweise von GPS
1 ... 3 Schnüre dreieckförmig festbinden und festgelegte Lage feststellen.
Mathematisches Problem: Schnitt dreier Kugeln.
Vektorform der Kugelgleichung:
$|\overrightarrow{MX}|=r$ ... $(\vec{x}-\vec{m})^2=r^2$
Koordinatengleichung... $(x_1-m_1)^2+(x_2-m_2)^2+(x_3-m_3)^2=r^2$
Übung 1
a) Wo liegen A(-5|-1|-4), B(-2|4|5), C(-4|3|7) bezgl. k(M(2|-3|1);r=9) [k_i, k, k_a]
b) Vereinfache die Koordinatengleichung und versuche die Ausgangsgleichung wiederherzustellen.
Übung 2
$k_1(M_1(1|2|2);r_1=2)\cap k_2(M_2(2|1|2);r_2=1)$
Bestimme die Trägerebene des Schnittkreises sowie dessen Mittelpunkt und Radius.
[Schnittkreis in $2x_1-2x_2=3$ (wenn Mittelpunktsabstand und die Radien ein Dreieck bilden, Kugelgleichungen subtrahieren)]
Übung 3 (Ziel)
Bestimme die Schnittpunkte der 3 Kugeln
7) Zeige: $k_1((1|2|2);\sqrt{6})\cap k_2((2|1|2);\sqrt{8})\cap k_3((2|2|1);\sqrt{10})=\{(2|3|4);(-2/3|1/3|4/3)\}$
Anleitung: Kugelgl. (1), (2), (3); Ebenen (1)-(2) und (1)-(3) schneiden und Schnittgerade in (1)
Erläuterung:
Die 3 Mittelpunkte bilden ein Dreieck. Die Schnittebenen stehen senkrecht auf diesem und haben folglich eine Schnittgerade. (3 sich schneidende Kreise zeichnen und jeweils als Äquator interpretieren.

Weitere Aufgaben
Aufgabe 1
a) Wie liegen die Punkte P(0|2|2), Q(1|2|2), R(2|2|2) zur Kugel mit dem Ursprung als Mittelpunkt und dem Radius 3.
b) Bestimme $S(s_1|2|0)$ so, dass S auf der Kugel aus Aufgabe a) liegt.
c) $X(x_1|x_2|x_3)$ sei ein beliebiger Punkt der Kugel mit dem Usprung als Mittelpunkt und dem Radius r. Welcher Zusammenhang besteht zwischen x_1, x_2, x_3 und r?
(Koordinatengleichung der Kugel)
d) Formuliere die Kugelgleichung in Vektorform.
Aufgabe 2
a) Wie liegen die Punkte P(-5|-1|-4), Q(-2|4|5), R(-4|3|7) zur Kugel mit Mittelpunkt M(2|-3|1);und Radius r=9.
b) Bestimme $S(-1|s_2|-4)$ so, dass S auf der Kugel aus Aufgabe a) liegt.
c) c) $X(x_1|x_2|x_3)$ sei ein beliebiger Punkt der Kugel mit dem Mittelpunkt M(m1|m2|m3) und dem Radius r. Welcher Zusammenhang besteht zwischen x_1, x_2, x_3, m_1, m_2, m_3 und r?
(Koordinatengleichung der Kugel)
d) Formuliere die Kugelgleichung in Vektorform.
Aufgabe 3
Berechne die Gleichung der Tangentialebene für die auf der Kugel gelegenen Punkte aus Aufgabe 1 und 2 konkret und allgemein.
Aufgabe 4
Die Kugeln aus Aufgabe 1 und 2 schneiden sich in einem Kreis. Bestimme dessen Radius, Mittelpunkt und die Trägerebene.
Aufgabe 5
Von den außerhalb gelegenen Punkten in Aufgabe 1 und 2 aus sollen die Tangenten an die Kugel gelegt werden. Die Berührpunkte liegen in einer Ebene. Stelle eine Koordinatengleichung auf.