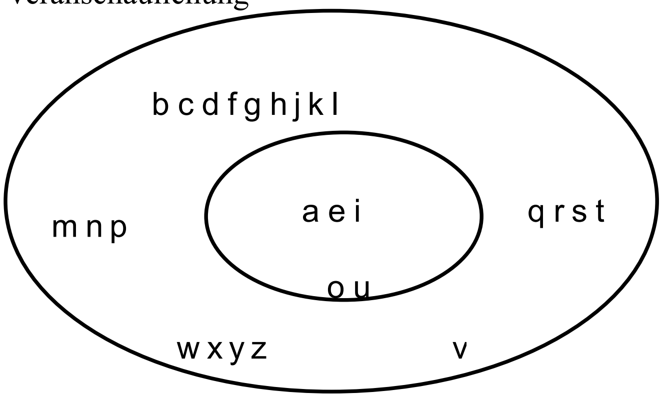
Mengen
Hat man unterscheidbare Objekte irgendwelcher Art, so kann man diese zu einer Menge zusammenfassen, diese heißen dann Elemente der Menge.
Beispiel:
Menge der Kleinbuchstaben des deutsche Alphabets
A={a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; k; l; m; n; o; p; q; r; s;t; u; v; w; x; y; z}
Die Reihenfolge spielt keine Rolle.
kürzer aber etwas unklar
A={a; b; c; ...; x; y; z}
oder
A={x|x ist Kleinbuchstabe des deutschen Alphabets}
(Menge aller x, für die gilt: x ist ...)

Die Mathematik beschäfigt sich mit der Bildung von Mengen und den Zusammenhängen zwischen ihnen.

Elemente
$a \in A$, $2 \notin A$
(a Element von A, 2 nicht Element von A)

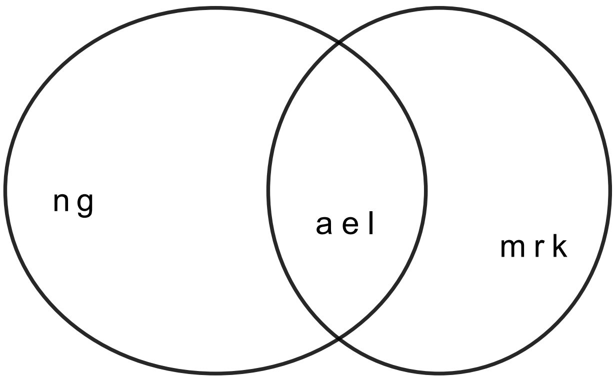
Teilmengen
Die Menge der Vokale {a; e; i; o; u} ist in der Menge der Kleinbuchstaben enthalten.
{a; e; i; o; u} ⊂ {a; b; c; d; e; f; g; h; i; j; k; l; m; n; o; p; q; r; s;t; u; v; w; x; y; z}
Veranschaulichung



allgemein:
B ⊂ A: Für alle $x \in A$ gilt $x \in B$.
Beweistechnik:
Wenn A ⊂ B und B ⊂ A, dann A=B.

Differenzmenge:
A\B={x| $x \in A$ und $x \notin B$ } nennt man Differenzmenge von A und B;
falls B ⊂ A Komplementmenge von B bezüglich A.
In obigem Beispiel wäre
A\B={b; c; d; f; g; h; j; k; l; m; n; p; q; r; s; t; w; x; y; z}

Vereinigung- und Schnitt von Mengen:
Wir stellen die Buchstabenmengen der Worte angela und merkel im Mengenbild dar



Man nennt {a: e; l} Schnittmenge und {n; g; a; e; l; m; r; k} Vereinigungsmenge der beiden Buchstabenmengen.
Allgemein:
Schnittmenge
$A \cap B=\{x|\ x\in A$ und $x\in B\ \}$
Vereinigungsmenge
$A \cup B=\{x|\ x\in A$ oder $x\in B\ \}$
Die Schnittmenge kann leer sein: {}
leere Menge

Differenzmenge:
Produkt von Mengen:
Betrachte A={uwe; udo; jan} und B={eva; iva; mia; ina} und die Beziehung „cousin von" so haben wir eine Beziehung zwischen den Mengen. Diese können wir als neue Menge ansehen.
R={(uwe, iva), (uwe, iva), (jan,mia)}.
Es handelt sich um eine Teilmenge des Produkts der Mengen.
AXB={(uwe,eva), (uwe,iva), (uwe,mia), (uwe,ina), (udo,eva), (udo,iva), (udo,mia), (udo,ina), (jan,eva), (jan,iva), (jan,mia), (jan,ina)}
allgemein: AXB={x|x=(a,b) mit $a\in A$ und $b\in B$ }
Darstellung in Tabellenform

	eva	iva	mia	ina
uwe	(uwe,eva)	(uwe,iva)	(uwe,mia)	(uwe,ina)
udo	(udo,eva)	(udo,iva)	(udo,mia)	(udo,ina)
jan	(jan,eva)	(jan,iva)	(jan,mia)	(jan,ina)

Die Elemente der Produktmenge heißen geordnete Paare.
Die „cousin von"-Relation kann auch folgendermaßen dargestellt werden

	eva	iva	mia	ina
uwe	w	w	f	f
udo	f	f	f	f
jan	f	f	w	f

(w=wahr, f=falsch)

Die Hauptrolle in der Mathematik spielen 2 Arten von Relationen: Funktionen und Äquivalenzrelationen.

Beispiel **Funktion (Abbildung)**
A={uwe, udo, jan, eva, iva, mia, ina}, B={m, w}
R={(uwe,,m), (udo,m), (jan,m), (eva,w), (iva,w), (mia,w), (ina,w)}
R ⊂ AXB heißt Funktion von A in B, wenn es zu jedem $x\in A$ genau ein $y\in B$ gibt, sodass $(x,y)\in R$.
A heißt Definitionsmenge, B Bildmenge oder Wertemenge.
Anschaulichere Schreibweise
Statt R ⊂ AXB schreibt man bei Funktionen f: A→B,
statt $(x,y)\in R$ schreibt man y=f(x).

In der Tabellendarstellung kann man das Vorliegen einer Funktion daran erkennen, dass in jeder Zeile genau ein w steht.

	m	w
uwe	w	f
udo	w	f
jan	w	f
eva	f	w
iva	f	w
mia	f	w
ina	f	w

Beispiel Äquivalenzrelation (auf einer Menge)
Wir betrachten folgende Relation „hat gleiches Geschlecht wie“:

	uwe	udo	jan	eva	iva	mia	ina
uwe	w	w	w	f	f	f	f
udo	w	w	w	f	f	f	f
jan	w	w	w	f	f	f	f
eva	f	f	f	w	w	w	w
iva	f	f	f	w	w	w	w
mia	f	f	f	w	w	w	w
ina	f	f	f	w	w	w	w

Die Relation ist
reflexiv: $(x,x)\in R$
symmetrisch: wenn $(x,y)\in R$, dann $(y,x)\in R$
transitiv: wenn $(x,y)\in R$ und $(y,z)\in R$, dann $(x,z)\in R$
(jeweils für alle x, y, z)
Durch die Äquivalenzrelation wird die Menge in Äqivalenzklassen aufgeteilt und man erhält die Quotientenmenge
A/R={{uwe, udo, jan}, {eva, iva, mia, ina}}
Die Elemente einer Äquivalenzklasse nennt man Repräsentanten.

Das letzte Beispiel zeigt, dass es sinnvoll ist, auch Mengen von Mengen zu betrachten; insbesondere eine Menge von Funktionen. Leider wird es jetzt etwas abstrakt,
Zum Beispiel kann man die Menge aller Funktionen betrachten, die die Menge {1, 2, 3} in die gleiche Menge abbilden:

1. f1= {(1,1),(2,2),(3,3)}	2. f2= {(1,1),(2,3),(3,2)}	3. f3= {(1,2),(2,1),(3,3)}
4. f4= {(1,2),(2,3),(3,1)}	5. f5= {(1,3),(2,1),(3,2)}	6. f6= {(1,3),(2,2),(3,1)}
7. f7= {(1,1),(2,1),(3,1)}	8. f8= {(1,2),(2,2),(3,2)}	9. f9= {(1,3),(2,3),(3,3)}
10. f10= {(1,1),(2,2),(3,2)}	11. f11= {(1,2),(2,1),(3,2)}	12. f12= {(1,2),(2,2),(3,1)}
13. f13= {(1,1),(2,3),(3,3)}	14. f14= {(1,3),(2,1),(3,3)}	15. f15= {(1,3),(2,3),(3,1)}
16. f16= {(1,3),(2,2),(3,2)}	17. f17= {(1,2),(2,3),(3,2)}	18. f18= {(1,2),(2,2),(3,3)}
19. f19= {(1,3),(2,3),(3,2)}	20. f20= {(1,2),(2,3),(3,3)}	21. f21= {(1,3),(2,2),(3,3)}

Wir betrachten die Teilmenge {f1, f2, f3, f4, f5, f6} mit Wertemenge {1, 2, 3}.
Man kann die Funktionen nacheinander ausführen.
Z.B.
f4(1)=2 und f6(2)=2   f4(2)=3 und f6(3)=1   f4(3)=1 und f6(1)=3
anders geschrieben
f6(f4(1))=2   f6(f4(2))=1   f6(f4(3))=3
und stellt fest
f6(f4(x))=f3(x) und schreibt f6°f4=f3
allgemein: f°g(x)=g(f(x)), wenn die Wertemenge von f in der Definitionsmenge von g liegt.
In folgender Tabelle sind alle Verkettungen aufgeführt

°	f1	f2	f3	f4	f5	f6
f1	f1	f2	f3	f4	f5	f6
f2	f2	f1	f4	f3	f6	f5
f3	f3	f5	f1	f6	f2	f4
f4	f4	f6	f2	f5	f1	f3
f5	f5	f3	f6	f1	f4	f2
f6	f6	f4	f5	f2	f3	f1

Man kann die Tabelle als Darstellung einer Funktion auffassen
{f1,f2,f3,f4,f5,f6}X{f1,f2,f3,f4,f5,f6} in {f1,f2,f3,f4,f5,f6}

allgemein:
Eine Funktion von AXA in A heißt (innere) Verknüpfung.
Hat man eine Menge mit einer inneren Verknüpfung, so nennt man diese zusammen mit der Verknüpfung eine **Gruppe**, wenn zusätzlich Folgendes gilt:

1. a°(b°c)=(a°b)°c für alle a,b,c aus A ... assoziatives Gesetz
2. Es gibt ein links-neutrales Element e aus A, sodass e°a=a für alle a aus A
3. Zu jedem a aus A gibt es ein links-Inverses Element a' aus a, sodass a'°a=e.

Nachdem man sich überzeugt hat, dass obige Tabelle eine Gruppentafel ist, kann man Eigenschaften von Gruppen auch ohne konkrete Beispiele allein aus den Gruppeneigenschaften folgern.

Satz: Ist (G,°) eine eine Gruppe:
Ein links-neutrales Element e ist auch rechts-neutral und eindeutig bestimmt.
Ein zu a links-inverses Element ist auch rechts-invers und eindeutig bestimmt.
Beweis:
Betrachte e und ein beliebiges a.
Dann gibt es zu a ein links-Inverses a' und zu diesem ein links-Inverses a''.
Dann gilt
a°a'=e°(a°a')=(a''°a')°(a°a')=a''°(a'°(a°a'))=a''°((a'°a)°a')=a''°(e°a')=a''°a'=e
und somit
a°e=a°(a'°a)=(a°a')°a=e°a=a
Für ein eventuell anderes neutrales Element e* gilt e°e*=e und e°e*=e*, also e=e*
Für ein eventuell zu a anderes inverses Element gilt a'*=a'*°e=a'*°(a°a')=(a'*°a)°a'=e°a'=a' qed

Dies war ein Beispiel für eine direkte Beweisführung.
Des weiteren kann man es indirekt versuchen, indem man die Behauptung negiert und versucht einen Widerspruch herbeizuführen.

Auf gleiche Weise wie Gruppen, werden die meisten mathematischen Objekte definiert.

Zum Schluss noch ein Tipp:
Um sich in ein mathematisches Gebiet einzuarbeiten braucht man sich nur den einen oder anderen typischen Beweis für das Gebiet anzusehen; wichtiger sind die vorliegenden Mengenstrukturen.